

Стоячие волны с пилообразными профилями, возбуждаемые набегающими потоками жидкости или газа

**Виталий Львович Крупенин**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия  
[krupeninster@gmail.com](mailto:krupeninster@gmail.com)

**Аннотация.** Изучаются автоколебания струны, vibrating в плоскости. Струна совершает автоколебания вызванные, например, действием набегающего потока жидкости или газа. Скорость потока перпендикулярна оси статического равновесия струны. Определяются установившиеся периодические стоячие волны с политрапецевидными и пилообразными профилями и приводятся результаты численного анализа их устойчивости.

**Ключевые слова:** авторезонанс, политрапецевидные профили, пилообразные профили, КСД - системы, устойчивость и неустойчивость стоячих волн.

**Abstract.** Studied self-oscillations of the strings, vibrating in the plane, where she commits self-oscillations, for example, under the action of the flow of liquid or gas. The flow velocity perpendicular to the axis of static equilibrium strings. Define the steady-state periodic standing waves with polytrapezoidal e and sawtooth profiles and the results of numerical analysis of their stability.

**Keywords:** autoresonant, polytrapezoidal profiles, sawtooth profiles, KDV system, stability and instability of standing waves.

1. Рассмотрим малые поперечные колебания струны, vibrating в плоскости и определяемой прогибом  $u(x,t)$ , отсчитываемым от оси статического равновесия (рис. 1).

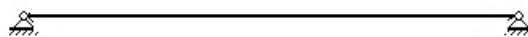


Рис.1

В дальнейшем, изучению будут подлежать системы, в которых колебания струны возбуждаются сторонними источниками. Тогда изучаемая модель будет представлять собой волновое уравнение с правой частью [1]:

$$\square u = h(t, u, u_t, \dots), \dots \dots \dots (1)$$

где вид функции  $h(\dots)$ обсуждается ниже, а  $\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  - оператор Д'Аламбера. Очевидно,

что всегда можно выбрать способ измерения времени и координаты так, чтобы коэффициенты в этом представлении для оператора  $\square$  были бы единичными.

Для автоколебаний струн, например, находящихся в набегающих потоках газа или жидкости, часто принимается [1 - 4]  $h = h(u_t)$ , где  $h(y)$  – полином нечетной степени с вещественными коэффициентами.

К уравнению (1) могут быть добавлены граничные и начальные условия.

Пусть  $x \in [-1/2, 1/2]$ ,  $t \geq 0$ . Примем, далее:

$$u(\pm 1/2, t) = 0; \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), \quad (2)$$

где функции  $u_0(x)$  и  $v_0(x)$  таковы, что обеспечено существование и единственность решения непрерывной по совокупности переменных задачи (1), (2) для линейного волнового уравнения  $\square u = 0$ , причем профили волн  $u(x, t)$ , возможно, имеют разрывы первого рода.

При рассмотрении установившихся движений, как обычно, влияние начальных условий становится несущественным. Отыскание установившихся решений в предположении, что

$$h(u_t) = \alpha u_t - \beta u_t^3 + \dots (\alpha, \beta > 0), \quad (3)$$

проводится в дальнейшем. Эта конкретизация (3) не категорична и здесь могут рассматриваться и другие аппроксимации функции  $h(\dots)$ . Существенным предположением оказывается требование нечетности функции  $h(\dots)$  по переменной  $u \equiv u_t$ .

2. В работе [5], имея в виду изучить стоячие волны в определенном смысле соответствующие собственным формам линейной струны, выбирались начальные условия вида

$$u_0(x) = 0; \quad v_0(x) = 2 \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} v [\eta(x-x_j) - \eta(x-x_{j+1})]. \quad (4)$$

Здесь:  $v$  – параметр;  $\eta(x)$  – функция Хевисайда; отрезок  $[-1/2, 1/2]$  разбит на  $N$  равных частей  $\Delta l = N^{-1}$ ; принято  $x_j = x_1 + (j-1)N^{-1}$ ,  $j=1, \dots, N$ ;  $x_1 = -1/2$ .

Выбранные начальные условия действительно в определенном смысле отвечает тем, что дают синусоидальные формы колебаний линейной струны и порождают семейство стоячих волн, имеющих вообще говоря, «политрапецевидные», переходящие в «пилообразные» профили (рис. 2). Периоды колебаний, естественно, совпадают с периодами колебаний линейных форм  $T_{0N} = 2N^{-1}$ . Обозначим это семейство как  $\{P_N(x, t)\}$ . Максимальные отклонения точек, лежащих на струне равны здесь  $v/2$ .

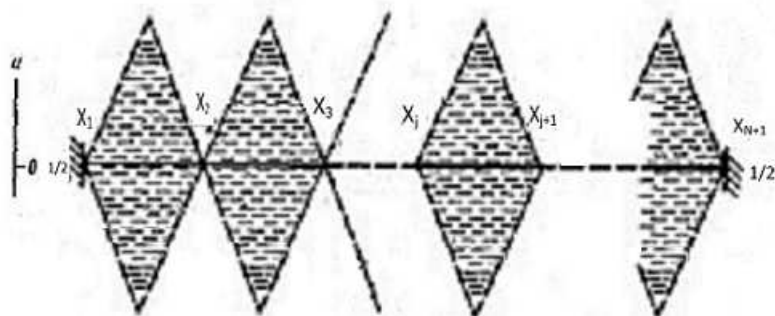


Рис.2.

Рассматриваемая система относится к автоколебательным системам с полной компенсацией сил диссипации в каждый момент времени [1] (КСД - системам).

Легко видеть, что при  $v = v_j = (\alpha/\beta)^{0.5}$  одновременно имеют место два равенства:

$$\square P_N = 0; \quad \alpha P_{Nt} - \beta P_{Nt}^3 = 0 \quad (5)$$

Таким образом все сразу видно, что члены семейства  $\{P_N(x,t)\}$  – определяют решения задачи (1)-(3).

Найденные таким простым способом решения определяют устойчивые стоячие волны, что было установлено путем численного моделирования задачи при предварительной дискретизации модели струны. Использовался метод конечных разностей. Детали исследования здесь не описываются, так как оно представляется достаточно стандартным.

3. Методика решения рассматриваемой задачи и отыскания семейств решений, подобным семейству  $\{P_N(x,t)\}$ , основана на следующем обстоятельстве.

Пусть функция  $h(z)$  непрерывна на всей числовой оси. Рассмотрим алгебраическое уравнение  $h(z)=0$ . Пусть, кроме корня  $z_0=0$ , оно имеет ещё по крайней мере одно нетривиальное решение. С учетом нечетности  $h(z)$ , структура множества  $Z_h$  корней этого уравнения оказывается такой:  $Z_h=\{0; \pm z_1; \pm z_2; \dots\}$  (все  $z_j > 0$ ).

Всякая непрерывная по совокупности переменных функция  $u(x,t)$ , являющаяся обобщенным решением линейного волнового уравнения  $\square u=0$  с граничными условиями (2) – второе и третье равенства – будет также и обобщенным решением задачи (1) с правой частью  $h(u_t)$ , если при каждом  $x$ , лежащем в отрезке  $[-1/2, 1/2]$  в каждый момент времени  $t$ :  $u(x,t) \in Z_h$ .

Стоячие волны  $\{P_N(x,t)\}$  могут порождаться не только начальными условиями типа (4), но и условиями, когда вместо (4)  $v_0(x)=0$ . При этом функция  $u_0(x)$  отвечает профилям, в которых для каждого  $N$  середины отрезков  $[x_j, x_{j+1}]$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ) защепляются и одновременно отводятся на одинаковые расстояния  $v/2$  в соответствии с рис. 2 поочередно в противоположенные стороны. То есть струне первоначально задается симметричный пилообразный профиль. Эквивалентность начальных условий (4) и, описанных только что, – устанавливается элементарно.

4. Пусть число  $a \in [0, 1/2]$ . Рассмотрим начальные условия вида:

$$u(x,0) = \frac{b}{a + 1/2} (x + 1/2), x \in [-1/2, a]; \quad u(x,0) = \frac{b}{a - 1/2} (x - 1/2), x \in [a, 1/2]; \quad u_t(x,0) = 0, \quad (6)$$

где  $b = 2v(\frac{1}{4} - a^2)$ ;  $v$ -параметр, однозначно связанный с полной энергией системы. Эти начальные условия порождают первую «кососимметричную» форму стоячей волны.

Можно показать, что конфигурации этой стоячей волны находятся внутри прямоугольника с вершинами  $D_1 = (-1/2, 0)$ ;  $D_2 = (-a, -b)$ ;  $D_3 = (1/2, 0)$ ;  $D_4 = (a, b)$  (рис.3).

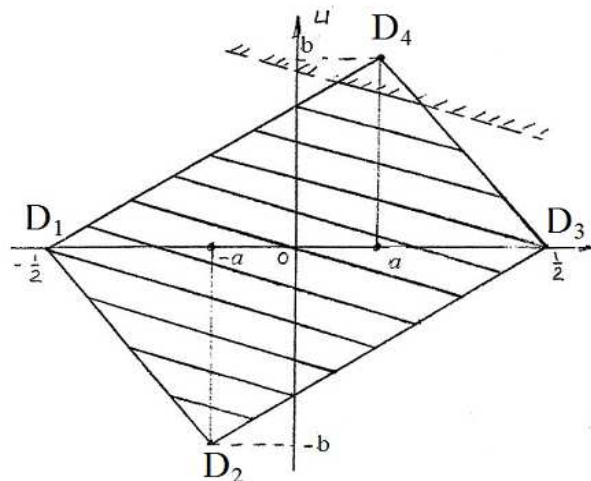


Рис.3

Они представляют собой трапеции с наклонными верхними основаниями, преобразующиеся при эволюции стоячей волны в некоторые моменты времени в треугольники, затем в два треугольника с вершинами, координаты которых имеют разные знаки, затем снова в треугольники, снова в трапеции и снова в финальную треугольную конфигурацию. Эти финальные конфигурации – суть треугольники  $D_1D_3D_4$  и  $D_1D_2D_3$ . Треугольник  $D_1D_3D_4$  как раз и отвечает выбранному начальному профилю (6). В данном случае была построена первая кососимметричная нелинейная форма колебаний. Подобным же образом могут быть построены и высшие кососимметричные формы автоколебаний. Однако, нельзя не отметить, что все они неустойчивы, что устанавливается численным анализом после дискретизации задачи.

Пусть  $\{W(a; x, t)\}$  – однопараметрическое семейство кососимметричных форм. Численным экспериментированием установлено, что при  $a \rightarrow 0$ :  $W(a; x, t) \rightarrow \Pi_1(x, t)$ , причем указанный предельный переход осуществляется сам собой по пришествию некоторого времени. Предельная стоячая волна  $\Pi_1(x, t)$ , как указывалось, асимптотически устойчива.

Аналогично находятся и высшие кососимметричные формы, и также аналогично могут быть рассмотрены и другие аналогичные КСД - системы.

Отметим, что стоячей волне  $W(a; x, t)$  можно придать устойчивость, введя в систему наклонный ограничитель и организовав периодические волны-хлопки [6].



Рис. 4

На рис. 4 показана экспериментально полученная эволюция стоячей волны – хлопка в режиме вынужденных колебаний для системы с одним наклонным ограничителем [7]. Предельное значение угла наклона, очевидно, зависит от метрических соотношений между длинами ограничителей и струны. После прохождения некоторого критического значения стоячая волна теряет стабильность. Кроме того, весьма трудно добиться ее плоской поляризации.

В заключении отметим, что физическое обоснование существования волн с изломанными профилями в струнных системах, впервые, по-видимому, дал А.А. Витт [8]. Он объяснял это эквидистантностью спектра собственных частот линейной струны, так как широкополосные воздействия (здесь механизм возбуждения автоколебаний) в этом случае способны одновременно возбудить большое число мод колебаний. А. А. Витт провел аналитическое исследование подобных волн и их устойчивости, опираясь на классические исследования Г. Гельмгольца [9].

Заметим, также, что подобные трапециевидные волны возникают и при автоколебаниях струн, вибрирующих в потоке жидкости или газа и в присутствии ограничителей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 13-08-01235-а и 13-08-90419 Укр\_ф\_а).

#### Список литературы

1. Крупенин В.Л. К динамике автоколебательных систем с компенсацией сил диссипации в каждый момент времени. // Интернет-журнал «Вестник научно - технического развития». 2014. №6. С. 10 –15.
2. Фролов К.В., Махутов Н.А., Каплунов С.М. и др. Динамика конструкций гидроупругих систем. – М.: Наука, 2002. -397.
3. Аксиса Ф., Антунеш Дж., Виллар Б. Обзор методов расчета гидродинамических возбуждаемых вибраций // Теоретические основы инженерных расчетов. М.: Мир, 1988, № 4. С. 109 – 123.
4. Паркинсон Г.В., Брукс Н.П. Аэроупругая неустойчивость плохо обтекаемых цилиндров // Труды американского общества инженеров-механиков: Прикладная механика. Сер.Б. 1961. Т. 28. С. 115-123.
5. Крупенин В.Л. Трансформация форм колебаний струны, взаимодействующей с двумя протяженными преградами. // ДАН СССР.1990.Т.313.№6.С.1394-1394.
6. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998.№5 С.13-30.
7. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Картины стоячих волн с изломами профилей, в распределенных объектах, соударяющихся с препятствиями различных конфигураций (часть I). // Вестник научно-технического развития. 2011. № 2(42). С.3-12.
8. Витт А. А. К теории скрипичной струны // ЖТФ. 1936. Т. 6. Вып. 9. С. 1459— 1479.
9. Helmholtz H. L. F. On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music. London: Longmans, Green and Co. 1895