Основные понятия теории множеств в решении задач по высшей математике

Ларионова Мария Александровна,

студентка ЕИ КФУ

факультета иностранных языков

Научный руководитель:

Миронова Юлия Николаевна

Аннотация: в статье рассматриваются основные понятия теории множеств и их применение в решении задач по высшей математике.

1. Понятие множества

Определение 1: Множеством называется совокупность определенных вполне различаемых объектов, рассматриваемых как единое целое.

Определение 2: Отдельные объекты, из которых состоит множество, называются элементами множества.

Множества принято обозначать большими буквами латинского алфавита, а элементы этих множеств — маленькими буквами латинского алфавита. Множества записываются в фигурных скобках { }.

Принято использовать следующие обозначения:

$a \in X$ — «элемент a принадлежит множеству X»;

$a \notin X$ — «элемент a не принадлежит множеству X»;

$\forall$ — квантор произвольности, общности, обозначающий «любой», «какой бы не был», «для всех»;

$\exists$ — квантор существования: $\exists y \in B$ — «существует (найдется) элемент y из множества B»;

$\Rightarrow$ — символ следствия, означает «влечет за собой»;

$\Leftrightarrow$ — квантор эквивалентности, равносильности — «тогда и только тогда»;

$\cap$ - конъюнкция, «и»;

$\cup$ - дизъюнкция, «или».

Определение 3: Множество, не содержащее ни одного элемента, называют пустым множеством и обозначают символом $\emptyset$.

2. Операции над множествами

Пусть A и B – некоторые множества

1) Объединением двух множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств (рис.1)

$A \cup B = \{x \in U | x \in A \text{ или } x \in B\}$

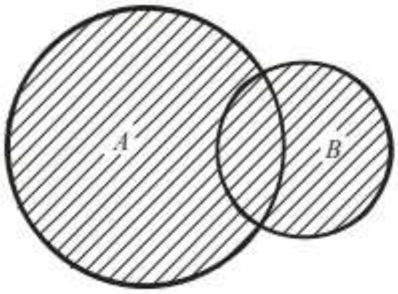

Рис. 1

2) Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее их тех и только тех элементов, которые одновременно принадлежат множествам A и B (рис.2)
$A \cap B = \{x \in U | x \in A \text{ и } x \in B\}$

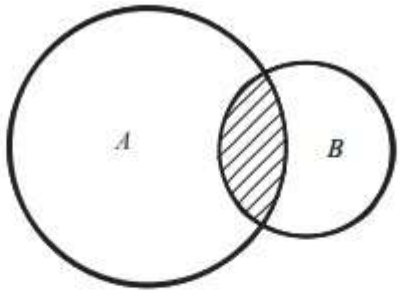

Рис. 2

3) Разностью двух множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат A и не принадлежат B (рис. 3)
$A \backslash B = \{x \in U | x \in A \text{ и } x \notin B\}$

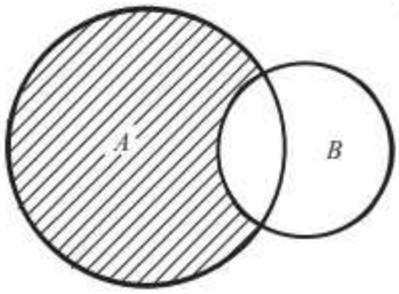

Рис. 3

Пример 1.

Доказать: $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

Доказательство:

1) $A \cap B \subseteq A$

$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ или } x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow A \cap B \subseteq A$

2) $A \subseteq A \cup B$

$x \in A \Rightarrow x \in A \text{ или } x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow A \subseteq A \cup B$

$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

Пример 2.

Дано: $A\{1,2,3,4,5\}$, B{5,6,7,9}, C{2,4,6,8}, D{7,9,11}.

Найти: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \cup C, B \cap C, B \setminus C, C \cup D, B \setminus C, C \cap D, A \cup (B \cup C), A \cap (B \cup C)$

Решение:

1) так как $A \cup B = \{x \in U | x \in A$ или $x \in B\}$, то $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$;
2) так как $A \cap B = \{x \in U | x \in A$ и $x \in B\}$, то $A \cap B = \{5\}$;
3) так как $A \setminus B = \{x \in U | x \in A$ и $x \notin B\}$, то $A \setminus B = \{1, 2, 3, 4\}$;

   аналогично
4) $B \cup C = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
5) $B \cap C = \{6\}$;
6) $B \setminus C = \{5, 7, 9\}$;
7) $C \cup D = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 11\}$;
8) $C \cap D = \emptyset$;
9) C\D = {2, 4, 6, 8};
10) Из пункта 4) $B \cup C = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
11) Из пункта 4) $B \cup C = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow A \cap (B \cup C) = \{2, 4, 5\}$.

Пример 3.

Дано: $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in 2k, k \in \mathbb{N}\}, D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$.

Найти: $C \cup D, C \setminus D, C \cap D$.

Решение:

1) так как $C \cup D = \{x \in U | x \in C$ или $x \in D\}$, то $C \cup D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k, k \in \mathbb{N} \cup x < 0\}$;
2) так как $C \cap D = \{x \in U | x \in C$ и $x \in D\}$, то $C \cap D = \emptyset$;
3) так как $A \setminus B = \{x \in U | x \in A$ и $x \notin B\}$, то $C \setminus D = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$.

Литература

1) Волков, В. А. Элементы теории множеств и развитие понятия числа [Текст] : Учеб. пособие. - Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1978. - 83 с.
2) Аминова А.В. Элементы теории множеств/ ред. Кондратьева И.Д. – Казань: Изд-во КФУ, 2008. – 46 с.
3) Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М. «Наука», Главная редакция физико-математической литературы/ Лавров И.А., Максимова Л.Л. - 5-е изд., исправл. — М.: Физматлит, 2004. — 256 с.